TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 04

Unicidad de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Proposición 1. *Sea $m : \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ una función con las siguientes propiedades:*

a) $m(\emptyset) = 0$

b) Si $E_1, E_2, \ldots$ es una colección infinita numerable de elementos de $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$, ajenos por parejas, entonces:

$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$

Entonces se cumple lo siguiente:

1. m es finitamente aditiva.

2. Si $A, B \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ y $A \subset B$, entonces $m(A) \leq m(B)$.

3. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$, entonces $m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$.

4. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de elementos de $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$, entonces $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} m(A_n)$.

5. m es $\sigma-$subaditiva.

Demostración

1. Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$, ajenos por parejas, y definamos $A_k = \emptyset$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > n$. Entonces:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

2. Sean $A, B \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ tales que $A \subset B$, entonces $B = A \cup (B - A)$, así que:

$$m(B) = m(A) + m(B - A)$$

Por lo tanto, $m(A) \leq m(B)$, ya que m es no negativa.

3. Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ y definamos $A_0 = \emptyset$, entonces:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} m\left(A_k - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

4. Si $\lambda(A_n) = \infty$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} m(A_n) = \infty$ y $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$; así que $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} m(A_n)$.

Supongamos ahora que $m(A_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Definamos $B_1 = A_1$ y, para cada $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $B_n = A_n - A_{n-1}$. Entonces los conjuntos $B_1, B_2, \ldots$ pertenecen a $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$, son ajenos por parejas y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Así que:

$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} m(B_k)$

$= m(B_1) + \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=2}^{n} m(A_k - A_{k-1}) = m(B_1) + \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=2}^{n} [m(A_k) - m(A_{k-1})]$

$= m(B_1) + \lim_{n\rightsquigarrow\infty} m(A_n) - m(A_1) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} m(A_n)$

5. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, entonces:

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \text{ y } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$$

Así que:

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) \leq \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{j=1}^{n} m(A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_j)$$

$\blacksquare$

Teorema 1. *Sea $\mu : \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ una función tal que:*

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu(I) = \ell(I)$ para cualquier intervalo I.

c) Si $E_1, E_2, \ldots$ es una colección infinita numerable de elementos de $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$, ajenos por parejas, entonces:

$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$

Entonces, $\mu(E) = \lambda(E)$ para cualquier conjunto $E \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$.

Demostración

Recordemos que un subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene medida cero si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito o infinito numerable de intervalos abiertos, cuya unión contiene al conjunto dado, y tales que la suma de sus longitudes es menor que ε.

Definamos $\mathcal{K}$ como el conjunto formado por todos los intervalos y todos los conjuntos de medida cero; entonces:

$$\mathfrak{L}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K})$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$F_n = [-n, n]$.

$$\mathcal{H}_n = \{A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}) : \mu(A \cap F_n) = \lambda(A \cap F_n)\}$$

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $J \in \mathcal{H}_n$ para cualquier intervalo J.

Además, si $A \subset \mathbb{R}$ tiene medida cero, entonces dada $\varepsilon > 0$, existe una familia finita o infinita numerable de intervalos abiertos $I_1, I_2, \ldots$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \varepsilon$. Por lo tanto:

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \varepsilon$$

Así que, $\mu(A) = 0$ y, entonces, $A \in \mathcal{H}_n$.

Por lo tanto, $A \in \mathcal{H}_n$ para cualquier $A \in \mathcal{K}$.

Vamos a demostrar que $\mathcal{H}_n$ es un $d-$sistema.

1. $\mathbb{R} \in \mathcal{H}_n$.

2. Si $A, B \in \mathcal{H}_n$ y $A \subset B$, entonces:

$\mu((B - A) \cap F_n) = \mu(B \cap F_n - A \cap F_n) = \mu(B \cap F_n) - \mu(A \cap F_n)$

$= \lambda(B \cap F_n) - \lambda(A \cap F_n) = \lambda(B \cap F_n - A \cap F_n) = \lambda((B - A) \cap F_n)$

Así que $B - A \in \mathcal{H}_n$.

3. Si $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{H}_n$, entonces:

$\mu\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \cap F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (A_m \cap F_n)\right) = \text{lím}_{n \rightsquigarrow \infty} \mu(A_m \cap F_n)$.

$= \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \lambda\left(A_m \cap F_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(A_m \cap F_n\right)\right) = \lambda\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \cap F_n\right)$

Así que $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{H}_n$.

$\mathcal{H}_n$ es entonces un d-sistema que contiene a los elementos de $\mathcal{K}$, así que $\mathcal{H}_n$ contiene a $\sigma(\mathcal{K}) = d(\mathcal{K})$.

Finalmente, si $A \in \sigma(\mathcal{K})$, se tiene:

$\mu\left(A\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(A \cap E_j\right)\right) = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu\left(A \cap F_n\right)$

$= \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \lambda\left(A \cap F_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(A \cap E_j\right)\right) = \lambda\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right) = \lambda\left(A\right)$

■

Conjuntos no medibles

En el año 1905 Giusseppe Vitali logró definir un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no es Lebesgue medible. Para esto, definió una relación de equivalencia en el intervalo $(0,1)$:

$$x \sim y \text{ si } x - y \text{ es un número racional}$$

Que ésta es un relación de equivalencia se demuestra fácilmente:

i.) $x \sim x$ para cualquietr $x \in (0,1)$ ya que $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$.

ii.) Si $x, y \in (0,1)$ y $x \sim y$, entonces $r = x - y \in \mathbb{Q}$, así que $y - x = -r \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $y \sim x$.

iii) Si $x, y, z \in (0,1)$ son tales que $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $r = x - y \in \mathbb{Q}$ y $s = y - z \in \mathbb{Q}$, así que $x - z = r + s \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $x \sim y$.

Con esta relación, el intervalo $(0,1)$ queda partido en clases de equivalencia; es decir, se tiene una colección de conjuntos $\mathbb{H} = \{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ tal que:

a) $(0,1) = \cup_{\{\gamma\in\Gamma\}} V_\gamma$

b) $V_\gamma \neq \emptyset$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$.

b) Si $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ y $\gamma \neq \gamma'$, entonces $V_\gamma \cap V_{\gamma'} = \emptyset$.

c) $x, y \in V_\gamma$ para alguna $\gamma \in \Gamma$ si y sólo si $x \sim y$.

Obsérvese que, si denotamos como $\mathbb{Q}_0$ al conjunto de los números racionales que pertenecen al intervalo $(0,1)$, entonces $\mathbb{Q}_0$ es una de las clases de equivalencia V_γ; es decir, $\mathbb{Q}_0 \in \mathbb{H}$.

Por otra parte, cada conjunto $V_\gamma \in \mathbb{H}$ es numerable ya que si $x \in V_\gamma$, el resto de sus elementos son de la forma $x+r$ o $x-r$, donde r es un número racional. Así que, como $(0,1) = \cup_{\{\gamma \in \Gamma\}} V_\gamma$, $\mathbb{H}$ es un conjunto no numerable. Por lo tanto, con la relación de equivalencia definida, el intervalo $(0,1)$ queda dividido en una colección no numerable de conjuntos numerables.

Por el axioma de elección, existe un conjunto P, el cual está formado por exactamente un elemento de cada conjunto $V_\gamma \in \mathbb{H}$.

Siguiendo a Vitali, vamos a demostrar que P no es Lebesgue medible.

Sea $S = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los números racionales que pertenecen al intervalo $(-1,1)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P_n = P + r_n$. Se tiene entonces:

$$m_e\left(P_n\right) = m_e\left(P\right)$$

Ademas, si $x \in (0,1)$, existe $y \in P$ tal que $x \sim y$; es decir, tal que $x - y \in \mathbb{Q}$. Y, como $x, y \in (0,1)$, $x - y \in (-1,1)$. Por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r_m = x - y$; es decir, $x = y + r_m$. Así que $x \in P + r_m = P_m$. Por lo tanto:

$$(0,1) \subset \cup_{n=1}^{\infty} P_n \subset (-1,2)$$

Por otra parte, los conjuntos $P_1, P_2, \ldots$ son ajenos por parejas. En efecto, sean $n, m \in N$ tales que $n \neq m$ y supongamos que $P_n \cap P_m \neq \emptyset$. Sea $z_0 \in P_n \cap P_m$; existen entonces $x_0, y_0 \in P$ tales que $z_0 = x_0 + r_n$ y $z_0 = y_0 + r_m$. Así que tenemos:

$$x_0 - y_0 = r_m - r_n \in \mathbb{Q}$$

Por lo tanto, $x_0 \sim y_0$ y, como $x_0, y_0 \in P$, se sigue que $x_0 = y_0$ y, entonces, $r_m = r_n$, lo cual es una contradicción ya que $n \neq m$.

Supongamos ahora que P es Lebesgue medible, entonces P_n es Lebesgue medible y $m\left(P_n\right) = m\left(P\right)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como $P_1, P_2, \ldots$ son ajenos por parejas, se tiene:

$$m\left(\cup_{n=1}^{\infty} P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(P\right)$$

Si $m\left(P\right) > 0$, entonces:

$$m\left[(-1,2)\right] \geq m\left(\cup_{n=1}^{\infty} P_n\right) = \infty$$

Lo cual es una contradicción ya que $m\left[(-1,2)\right]=3$.

Si $m\left(P\right)=0$, entonces:

$$m\left[(0,1)\right]\leq m\left(\cup_{n=1}^{\infty}P_n\right)=0$$

Lo cual es una contradicción ya que $m\left[(0,1)\right]=1$.

Así que si P fuera Lebesgue medible, su medida no podría ser ni positiva, ni cero. Lo cual es una contradicción; por lo tanto, P no es Lebesgue medible.

Observaciones:

1. P contiene únicamente un número racional r ya que $\mathbb{Q}_0$ es uno de los elementos V_γ de $\mathbb{H}$.

2. P contiene una infinidad no numerable de conjuntos medibles de medida cero, a saber, todos sus subconjuntos numerables.

3. Cualquier subconjunto medible E de P tiene medida cero. En efecto, sea E un conjunto medible contenido en P y, para cada $n\in\mathbb{N}$, definamos $E_n=E+r_n$. Se tiene entonces:

$$m\left(E_n\right)=m\left(E\right)$$

Los conjuntos $E_1,E_2,\ldots$ son ajenos por parejas. En efecto, sean $n,m\in N$ tales que $n\neq m$ y supongamos que $E_n\cap E_m\neq\emptyset$. Sea $z_0\in E_n\cap E_m$; existen entonces $x_0,y_0\in E$ tales que $z_0=x_0+r_n$ y $z_0=y_0+r_m$. Así que tenemos:

$$x_0-y_0=r_m-r_n\in\mathbb{Q}$$

Por lo tanto, $x_0\sim y_0$ y, como $x_0,y_0\in P$, se sigue que $x_0=y_0$ y, entonces, $r_m=r_n$, lo cual es una contradicción ya que $n\neq m$.

Por otra parte, como $E\subset P\subset(0,1)$ y $r_n\in(-1,1)$ para toda $n\in\mathbb{N}$, $E_n\subset(-1,2)$ para cualquier $n\in\mathbb{N}$.

Así que tenemos:

$$3\geq m\left(\cup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m\left(E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m\left(E\right)$$

Si $m\left(E\right)$ fuera positiva, se tendría $3\geq\infty$, lo cual es falso; por lo tanto, $m\left(E\right)=0$.